SOLVING $f(x)=0$ USING NEWTON-WAVELET

Kais Ismail, Riyad Mubarak Abdullah, Totok Suprawoto

STMIK AKAKOM
Jl. Janti, Ringroad Timur, Karangjambe, Yogyakarta
E-mail: kaisismail@yahoo.com
E-mail: riyad_alhano@mailcity.com
E-mail: totok@akakom.ac.id

Abstrak

Dalam paper ini akan diperkenalkan suatu metode baru untuk menyelesaikan persamaan $f(x)=0$. Metode baru ini disebut dengan Newton-Wavelet. Metode baru ini telah terbukti mampu mengurangi jumlah iterasi secara signifikan dibandingkan dengan metode Broyden dan hanya memiliki sedikit perbedaan signifikan dengan metode Newton. Untuk membandingkan unjuk kerja ketiga metode tersebut telah diterapkam kedalam beberapa persamaan tak-linear.

Kata Kunci : newton method, broyden method, wavelet method

1. Pengantar

Dalam paper ini akan diperkenalkan tiga metode untuk menyelesaikan persamaan tak-linear, yang dipilih dari banyak metode gelombang-singkat. Permasalahan ini muncul dari masalah-masalah praktis. Bentuk umum permasalahan ini sesederhana pencarian nilai variabel x seperti pada $f(x)=0$, dimana f adalah suatu fungsi tak-linear dari x. Nilai x disebut suatu solusi atau akar dari persamaan ini dan mungkin menjadi satu-satunya solusi yang ada [1].

Metode-metode mengenai sistem penyelesaian persamaan linear telah dilakukan penelitian dalam paper [2], [3], [4] dan [5]. Selanjutnya penelitian akan dilanjutkan dengan menggunakan gelombang-singkat (*wavelet*) untuk menyelesaikan persamaan tak-linear.

2. Metode Newton

Metode yang dicari berkaitan dengan penemuan satu atau semua akar persamaan aljabar tak-linear dengan satu variabel bebas. Metode ini digunakan untuk menyelesaikan persamaan aljabar tak-linear yang merupakan suatu fungsi cacah tertentu variabel. Sistem ini bisa dalam bentuk sebagai berikut:

$$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)=0 \text{ untuk } i=1,2,3,\ldots,n \tag{1}$$

Suatu metode sederhana untuk menyelesaikan persamaan tak-linear ini berasal dari metode Newton untuk persamaan tunggal. Prosedur ini digambarkan dengan suatu sistem dua persamaan dalam dua variabel:

$$\begin{aligned} f_1(x_1,x_2)&=0 \\ f_2(x_1,x_2)&=0 \end{aligned} \tag{2}$$

perkiraan awal x_1^0 dan x_2^0 untuk x_1 dan x_2, kita akan menemukan perkiraan baru yaitu x_1^1 dan x_2^1 seperti berikut:

$$\begin{aligned} x_1^1&=x_1^0+\Delta x_1^0 \\ x_2^1&=x_2^0+\Delta x_2^0 \end{aligned} \tag{3}$$

Perkiraan ini harus mengarahkan nilai fungsi untuk mendekati nilai nol, sehingga

$$f_1(x_1^1, x_2^1) = 0$$
$$f_2(x_1^1, x_2^1) = 0$$

atau

$$\begin{aligned} f_1(x_1^0 + \Delta x_1^0, x_2^0 + \Delta x_2^0) = 0 \\ f_2(x_1^0 + \Delta x_1^0, x_2^0 + \Delta x_2^0) = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

dengan memasukan ekspansi deret Taylor dua dimensi ke dalam persamaan (4) menghasilkan

$$\begin{aligned} f_1(x_1^0, x_2^0) + (\partial f_1 / \partial x_1)^0 \Delta x_1^0 + (\partial f_1 / \partial x_2)^0 \Delta x_2^0 + \mathrm{K} = 0 \\ f_2(x_1^0, x_2^0) + (\partial f_2 / \partial x_1)^0 \Delta x_1^0 + (\partial f_2 / \partial x_2)^0 \Delta x_2^0 + \mathrm{K} = 0 \end{aligned} \tag{5}$$

Jika akar Δx_1^0 dan Δx_2^0 lebih besar dari satu, maka persamaan (5) adalah suatu sistem dua persamaan linear dengan dua variabel. Nilai nol pada bagian atas berarti fungsi tersebut dihitung pada perkiraan awal, dimana Δx_1^0 dan Δx_2^0 adalah variabel yang hendak dicari. Setelah persamaan (5) terselesaikan, akan diperoleh perkiraan lanjutan dan mengulangi proses tersebut sampai memperoleh hasil yang diinginkan. Kriteria konvergensi umum adalah melanjutkan iterasi hingga

$$\sqrt{(\Delta x_1^r)^2 + (\Delta x_2^r)^2} < \varepsilon \tag{6}$$

dimana r adalah cacah iterasi dan ε adalah suatu bilangan positif kecil yang ditentukan. Prosedur ini bisa diterapkan untuk suatu sistem dengan variabel atau persamaan yang banyak. Sistem umum persamaan ini:

$$f(x) = 0 \tag{7}$$

dimana f adalah vektor kolom komponen n $(f_1, f_2, f_3, \mathrm{K}, f_n)^T$ dan x adalah suatu vektor kolom n $(x_1, x_2, x_3, \mathrm{K}, x_n)^T$. Nilai x^{r+1} merupakan nilai x pada iterasi $(r+1)$, selanjutnya

$$x^{r+1} = x^r + \Delta x^r \text{ untuk } r = 0,1,2,3,\mathrm{K} \tag{8}$$

Jika x^{r+1} adalah perkiraan lanjutan x maka

$$f(x^{r+1}) = 0 \tag{9}$$

atau

$$f(x^r + \Delta x^r) = 0 \tag{10}$$

Dengan mengembangkan persamaan (10) menggunakan suatu deret Taylor n dimensi menghasilkan

$$f(x^r + \Delta x^r) = f(x^r) + \nabla f(x^r) \Delta x^r + \mathrm{K} \tag{11}$$

dimana ∇ adalah suatu operator vektor turunan parsial, yang berhubungan dengan masing-masing n komponen x. Jika orde yang lebih tinggi dalam $(\Delta x^r)^2$ diabaikan, berdasarkan persamaan (10)

$$f(x^r) + J_r \Delta x^r = 0 \tag{12}$$

dimana $J_r = f(x^r)$. J_r disebut matriks Jacobian. Notasi r dibawah berarti bahwa matriks dievaluasi pada titik x^r dan bisa ditulis dalam bentuk komponen sebagai

$$J_r = \left[\partial f_i(x^r)/\partial x_j\right] \text{ untuk } i = 1,2,3,K\,,n \text{ dan } j = 1,2,3,K\,,n \tag{13}$$

dari persamaan (2.8) didapatkan perkiraan lanjutan

$$x^{r+1} = x^r - J_r^{-1} f(x^r) \text{ untuk } r = 0,1,2,K \tag{14}$$

matriks J_r bisa merupakan suatu matriks tunggal dan dalam keadaan ini inversnya J_r^{-1} tidak bisa ditentukan.

Ini adalah bentuk umum metode Newton, yang mengandung dua kelemahan utama yaitu:

- Metode tersebut tidak bisa digunakan jika memiliki perkiraan awalnya yang tidak tepat.
- Metode ini mengharuskan pemberian turunan masing-masing fungsi untuk setiap variabel. Oleh karena itu harus diberikan n^2 turunan dan suatu implementasi komputer harus mengevaluasi n fungsi dan n^2 turunan pada tiap iterasi [1].

2.1 Algoritma Newton [16]

Hitung $f(x_0), f'(x_0)$
Tentukan x_1, x_2
    Jika $(f(x_0) \neq 0)$ dan $(f'(x_0) \neq 0)$
Ulangi
    Tentukan $x_0 = x_1$
    Tentukan $x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0)$
Hingga $(|x_0 - x_1| <$ nilai toleransi 1) atau
    $(|f(x_1)| <$ nilai toleransi 2)

3. Metode Broyden

Metode Newton memberikan solusi untuk sistem terkecil pada persamaan tak-linear tetapi tidak untuk persamaan linear. Metode ini tidak hanya membutuhkan definisi fungsi tetapi juga definisi n^2 turunan parsial fungsi. Jadi untuk suatu sistem dengan sepuluh persamaan dalam sepuluh variabel dibutuhkan seratus sepuluh definisi fungsi.

Untuk menyelesaikan permasalahan ini metode yang paling tepat adalah metode Quasi-Newton. Metode Quasi-Newton tidak memerlukan perhitungan parsial dengan menghasilkan perkiraan yang melibatkan hanya nilai fungsi tersebut. Himpunan turunan fungsi tersebut dievaluasi pada x^r dan bisa ditulis dalam bentuk matriks Jacobian.

$$J_r = \left[\partial f_i(x^r)/\partial x_j\right] \text{ for } i = 1,2,3,K\,,n \text{ and } j = 1,2,3,K\,,n \tag{15}$$

Metode Quasi-Newton menghasilkan suatu rumus baru, yang memberikan perkiraan berganti pada Jacobian untuk setiap iterasi. Broyden dan yang lain telah menunjukan bahwa pada kondisi tertentu rumus baru ini memberikan perkiraan yang memuaskan pada invers Jacobian. Struktur yang diusulkan Broyden adalah:

1. Masukan suatu perkiraan awal terhadap solusi. Tentukan penghitung r menjadi nol.
2. Hitung atau asumsikan suatu perkiraan awal terhadap invers Jacobian B^r.
3. Hitung $p^r=-B^r f^r$ dimana $f^r=f(x^r)$.
4. Tentukan parameter skalar t seperti $\|f(x^r+t_r p^r\|<\|f^r\|$.
5. Hitung $x^{r+1}=x^r+t_r p^r$.
6. Hitung $f^{r+1}=f(x^{r+1})$. Jika $\|f^{r+1}\|<\varepsilon$, dimana ε adalah suatu nilai positif kecil, kemudian keluar. Jika tidak melanjutkan ke langkah (7).
7. Kegunaan rumus baru ini untuk memperoleh perkiraan yang dinginkan terhadap Jacobian $B^{r+1}=B^r-(B^r y^r-p^r)(p^r)^T B^r/\{(p^r)^T B^r y^r\}$ dimana $y^r=f^{r+1}-f^r$.
8. Tentukan $i=i+1$ dan kembali ke langkah (3).

Perkiraan awal terhadap invers Jacobian B biasanya digunakan sebagai perkalian skalar matriks unit. Algoritma ini tergantung pada bentuk asli fungsi yang akan diselesaikan dan kedekatan perkiraan awal terhadap solusi. Permasalahan utama muncul pada langkah (4). Langkah ini memerlukan waktu perhitungan yang lama dan untuk menghindari hal ini t selalu ditetapkan konstan, biasanya satu atau lebih kecil. Hal ini mungkin mengurangi kestabilan algoritma tetapi memberikan waktu yang singkat.

Yang harus diingat bahwa rumus Broyden bisa digantikan oleh rumus lain untuk algoritma di atas. Secara umum penyelesian suatu sistem tak-linear merupakan suatu hal yang rumit. Tidak ada algoritma yang bisa diterapkan untuk semua sistem persamaan tersebut. Untuk suatu sistem persamaan yang besar, algoritma penyelesaiannya cenderung membutuhkan waktu yang lama untuk memperoleh hasil yang tepat [6].

4. Analisis Gelombang-singkat

Gelombang-singkat adalah famili dari baru fungsi basis yang bisa digunakan untuk memperkirakan fungsi umum [7]. Gelombang-singkat adalah suatu bentuk gelombang dengan durasi terbatas secara efektif yang memiliki nilai rerata nol. Hal ini berbeda dengan gelombang sinus yang merupakan basis analisis Fourier, yang tidak memiliki durasi terbatas (pada interval minus tak terbatas hingga plus tak terbatas). Sinusoidal selalu berbentuk halus dan bisa diprediksi, sedangkan gelombang-singkat cenderung tidak teratur dan asimetris.

Analisis Fourier adalah suatu proses pemecahan suatu sinyal menjadi gelombang sinus dengan frekuesi yang berbeda. Sedangkan analisis gelombang-singkat memecahkan suatu sinyal menjadi versi terskala dan tergeser dari suatu gelombang-asli atau gelombang-singkat induk [8].

Alihragam Fourier dan gelombang-singkat banyak digunakan dalam mempelajari masalah sinyal, dimana gelombang bisa kontinu terhadap waktu atau hanya ada pada waktu diskret. Suatu matriks adalah suatu susunan berkolom dan berbaris sinyal diskret seperti pada analisis alihragam. Jika suatu operasi ditampilkan pada persamaan matriks $Ax=b$, dihasilkan suatu persamaan yang dialihragamkan $WAx=Wb$. Hal ini bisa ditulis sebagai

$$(WAW^{-1})(Wx)=Wb \tag{16}$$

misalnya alihragam ortogonal W, suatu operasi inversi relasi

$$(WAW^T)Wx=Wb, \tag{17}$$

yang sama dengan operasi triangularisasi blok, yang menghindari operasi invers untuk dilanjutkan dengan perhitungan solusi numeris yang diinginkan. Suatu sifat umum metode ini adalah bahwa alihragam gelombang-singkat dari suatu matriks padat menjadi matriks jarang [9]. Oleh karena itu

$O(N^3)$ biaya penghitungan bisa dikurangi menjadi operasi yang jauh lebih murah. Dalam paper [2] memberikan suatu penjelasan singkat mengenai gelombang-singkat dan alihragam gelombang-singkat.

4.1 Algoritma Newton-Wavelet

Dengan menggunakan algoritma berikut:

1. Mulai dengan perkiraan awal x_0;
2. Untuk $k = 0,1,2,...$:
3. Hitung $F(x_k)$, $J(x_k)$ adalah matriks Jacobian dari $F(x)$ pada x_k;
4. Selesaikan persamaan linear untuk S_k: $J(x_k)\ S_k = -F(x_k)$ menggunakan gelombang-singkat.
   a. $[J(x_k)]\ S = -F(x_k)$, $S = [x_{k+1} - x_k]$
   b. w = Gelombang-singkat
   c. aw = w$J(x_k)$w';
   d. bw = w$F(x_k)$;
   e. xw = invers (aw)bw;
   f. S = w'xw;
5. Uji konvergensi x_k; Jika ya, keluar;
   Selain itu tentukan $k = k+1$, dan lanjutkan ke (a).

4.2 Gelombang-singkat Haar

Gelombang-singkat Haar didefinisikan sebagai:

$$\psi_H(x) = \begin{cases} 1 & \text{untuk} \quad 0 \le x < \frac{1}{2} \\ -1 & \text{untuk} \quad \frac{1}{2} \le x < 1 \\ 0 & \text{selain itu} \end{cases} \tag{18}$$

Dalam analisis Fourier berikut ini, suatu gelombang-singkat $\psi(x)$ bisa digunakan sebagai blok dasar untuk membuat suatu gelombang *f (x)*,

$$f(x) = \sum_{j,k=-\infty}^{\infty} c_{j,k}\,\psi_{j,k}(x) \tag{19}$$

dengan

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\,\psi(2^j x - k),\ \text{untuk semua}\ j,k \in Z. \tag{20}$$

koefisien $c_{j,k}$ bisa dihitung dari:

$$c_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k} \rangle. \tag{21}$$

Mengikuti ide alihragam Fourier, alihragam gelombang-singkat W_ψ untuk setiap gelombang *f(x)* bisa didefinisikan menurut:

$$(W_\psi f)(b,a) = |a|^{\frac{-1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\overline{\psi(\frac{x-b}{a})}dx. \tag{22}$$

Koefisien $c_{j,k}$ bisa dihitung dari relasi berikut ini:

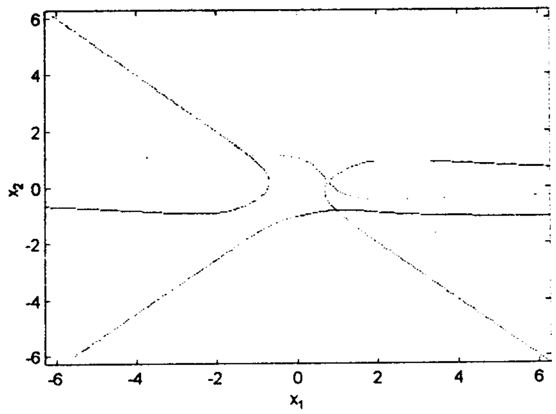
$$c_{j,k} = (W_\psi f)\left(\frac{k}{2^j}, \frac{1}{2^j}\right)[8]. \tag{23}$$

5. Hasil Secara Numeris

Pemecahan persaman sistem tak-linear ini dilakukan dengan membandingkan unjuk kerja fungsi Newton, Broyden dan Newton-Wavelet. Di bawah ini adalah fungsi mengenai cacah iterasi kemudian menjalankan eksperimen terhadap enam contoh sistem persamaan dan diperoleh hasil sebagai berikut:

Contoh 1:
Di bawah ini adalah sistem dua persamaan dengan dua variabel:

$$xe^{xy+0.8} + e^{y^2} = 3 \tag{1}$$
$$x^2 - y^2 - 0.5e^{xy} = 0 \tag{2}$$

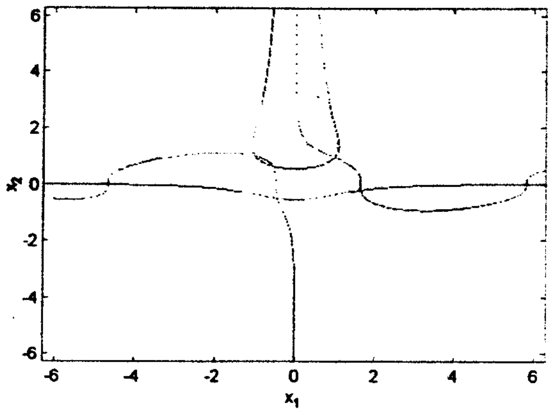


Hasil pendekatan awal untuk akar adalah:

Nilai awal	Newton		Broyden		Newton-Wavelet	
	Akar	Iterasi	Akar	Iterasi	Akar	Iterasi
1 1	 0.1716	5	-	-	0.7749 0.1725	4
-1 -1	0.7750 0.1716	5	0.7750 0.1716	29	0.7750 0.1716	5
0.5 0.5	0.7750 0.1716	3	-	-	0.7750 0.1716	2

Contoh 2:
Di bawah ini adalah sistem dua persamaan dengan dua variabel:

$$xy^3 - 2\sin(1+x) = 1 \tag{1}$$
$$e^{1-y^2} + x^2 y = 2 \tag{2}$$



Hasil pendekatan awal untuk akar adalah:

Nilai awal	Newton		Broyden		Newton-Wavelet	
	Akar	Iterasi	Akar	Iterasi	Akar	Iterasi
1 1	0.9734 0.9521	2	0.9733 0.9521	7	0.9734 0.9521	2
-1 -1	-0.4425 -0.5082	4	0.9733 0.9521	40	-0.4426 -0.5083	3
0.5 0.5	0.9733 0.9521	9	-0.4425 -0.5082	11	0.9755 0.9522	8

Contoh 3:
Di bawah ini adalah sistem tiga persamaan dengan tiga variabel:

$$3.1x_2 - \cos(x_1x_2) = 0.6 \quad (1)$$

$$1.03e^{-x_1x_2} + 1.95x_3 = 11 \quad (2)$$

$$x_2^2 - 83(x_1 + 0.11)^2 + \sin x_3 = 0.97 \quad (3)$$

Hasil pendekatan awal untuk akar adalah:

Nilai awal	Newton		Broyden		Newton-Wavelet	
	Akar	Iterasi	Akar	Iterasi	Akar	Iterasi
-1 -1 -1	0.0179 0.5161 -6.1644	6	-	-	0.0179 0.5161 -6.1644	5
2 7 3	-0.2342 0.5138 -6.2368	8	-	-	-0.2345 0.5138 -6.2369	7
2 4 9	0.0178 0.5161 -6.1644	7	-	-	0.0179 0.5161 -6.1644	6

Contoh 4:
Di bawah ini adalah sistem empat persamaan dengan empat variabel:

$$x_1 = 1 \quad (1)$$

$$x_1x_2 = 1 \quad (2)$$

$$x_1x_2x_3 = 1 \quad (3)$$

$$x_1x_2x_3x_4 = 1 \quad (4)$$

Hasil pendekatan awal untuk akar adalah:

Nilai awal	Newton		Broyden		Newton-Wavelet	
	Akar	Iterasi	Akar	Iterasi	Akar	Iterasi
-1 -1 -1 -1	1 1 1 1	3	1 1 1 1	15	1 1 1 1	3
2 2 2 2	1 1 1 1	4	1 1 1 1	14	1 1 1 1	4
5 5 5 5	1 1 1 1	4	-	-	1 1 1 1	4

Contoh 5:
Di bawah ini adalah sistem lima persamaan dengan lima variabel:

$$8(x_1-x_2^2)=0 \quad (1)$$
$$16x_2(x_2^2-x_1)-2(1-x_2)+8(x_2-x_3^2)=0 \quad (2)$$
$$16x_3(x_3^2-x_2)-2(1-x_3)+8(x_3-x_4^2)=0 \quad (3)$$
$$16x_4(x_4^2-x_3)-2(1-x_4)+8(x_4-x_5^2)=0 \quad (4)$$
$$16x_5(x_5^2-x_4)-2(1-x_5)+8(x_5-x_6^2)=0 \quad (5)$$
$$16x_6(x_6^2-x_5)-2(1-x_6)+8(x_6-x_7^2)=0 \quad (6)$$
$$16x_7(x_7^2-x_6)-2(1-x_7)+8(x_7-x_8^2)=0 \quad (7)$$
$$16x_8(x_8^2-x_7)-2(1-x_8)=0 \quad (8)$$

Hasil pendekatan awal untuk akar adalah:

Nilai awal	Newton		Broyden		Newton-Wavelet	
	Akar	Iterasi	Akar	Iterasi	Akar	Iterasi
2 2 2 2 1 1 1 1	1 1 1 1 1 1 1 1	7	-	-	1 1 1 1 1 1 1 1	6
0.9 0.9 0.9 0.9 0.9 0.9 0.9 0.9	1 1 1 1 1 1 1 1	6	-	-	1 1 1 1 1 1 1 1	5

1.1	1	6	-	-	1	5
1.1	1				1	
1.1	1				1	
1.1	1				1	
1.1	1				1	
1.1	1				1	
1.1	1				1	
1.1	1				1	

Contoh 6:
Di bawah ini adalah sistem enam persamaan dengan enam variabel:

$$x_1 + x_7 x_{16} = 3 \quad (1)$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_{10} + x_{13}x_{16} = 10 \quad (2)$$
$$x_3 = 1 \quad (3)$$
$$x_1 + x_3 + 2x_4 + x_5 + x_6 + x_{12}x_{13} = 11 \quad (4)$$
$$2x_1 + x_5 x_7 = 3 \quad (5)$$
$$x_1 + x_6 + x_8 x_{14} = 7 \quad (6)$$
$$x_7 x_8 = 2 \quad (7)$$
$$x_7^2 + x_8 = 3 \quad (8)$$
$$x_1 + 4x_9 + x_{11} + x_{12}x_{16} = 10 \quad (9)$$
$$x_1^2 + 3x_5 + x_{10}x_{13} = 6 \quad (10)$$
$$x_9 + x_{10}x_{11} = 3 \quad (11)$$
$$x_6 + 2x_9 + x_{11} + x_{12} = 6 \quad (12)$$
$$x_{10}x_{13} = 2 \quad (13)$$
$$x_3 + x_8 x_{14} = 5 \quad (14)$$
$$x_3 + 2x_4 + x_8 + 3x_{10} + x_{14}x_{15} = 15 \quad (15)$$
$$x_2 + 2x_5 + x_{10}x_{16} = 8 \quad (16)$$

Hasil pendekatan awal untuk akar adalah:

Nilai awal	Newton		Broyden		Newton-Wavelet	
	Akar	Iterasi	Akar	Iterasi	Akar	Iterasi
2	0.9969	9			0.9969	7
2	2.0042				2.0042	
2	1.0000				1.0000	
2	5.4752				5.4752	
2	1.0021				1.0021	
2	2.0031				2.0031	
2	1.0042				1.0042	
2	1.9916				1.9916	
2	4.9676				4.9676	
2	2.0010				2.0010	
2	-0.9833				-0.9833	
2	-4.9550				-4.9550	
2	0.9995				0.9995	
2	2.0084				2.0084	
2	-2.4621				-2.4621	
2	1.9948				1.9948	

15	0.9969	10	-	-	0.9969	10
15	2.0042				2.0042	
15	1.0000				1.0000	
15	5.4752				5.4752	
15	1.0021				1.0021	
15	2.0031				2.0031	
15	1.0042				1.0042	
15	1.9916				1.9916	
15	4.9676				4.9676	
15	2.0010				2.0010	
15	-0.9833				-0.9833	
15	-4.9550				-4.9550	
15	0.9995				0.9995	
15	2.0084				2.0084	
15	-2.4621				-2.4621	
15	1.9948				1.9948	
20	0.9994	11	-	-	0.9954	8
20	2.0008				2.0062	
20	1.0000				1.0000	
20	5.4954				5.4638	
20	1.0004				1.0031	
20	2.0006				2.0046	
20	1.0008				1.0062	
20	1.9985				1.9877	
20	4.9940				4.9528	
20	2.0002				2.0015	
20	-0.9969				-0.9756	
20	-4.9917				-4.9345	
20	0.9999				0.9992	
20	2.0015				2.0123	
20	-2.4930				-2.4447	
20	1.9990				1.9923	

Contoh 7:

Di bawah ini adalah sistem tujuh persamaan dengan tujuh variabel:

$$8(x_1 - x_2^2) = 0 \tag{1}$$

$$16x_j(x_j^2 - x_{j-1}) - 2(1 - x_j) + 8(x_j - x_{j+1}^2) = 0, \text{ for } j = 2, \ldots, n-1 \tag{2}$$

$$16x_n(x_n^2 - x_{n-1}) - 2(1 - x_n) = 0, \text{ for } n = 32 \tag{3}$$

Hasil pendekatan awal untuk akar adalah:

Nilai awal	Newton		Broyden		Newton-Wavelet	
	Akar	Iterasi	Akar	Iterasi	Akar	Iterasi
1.1	1.000	6	-	-	1.000	7
1.1	1.000				1.000	
1.1	1.000				1.000	
1.1	1.000				1.000	
1.1	1.000				1.000	
1.1	1.000				1.000	
1.1	1.000				1.000	
1.1	1.000				1.000	
1.1	1.000				1.000	
1.1	1.000				1.000	
1.1	1.000				1.000	
1.1	1.000				1.000	
1.1	1.000				1.000	
1.1	1.000				1.000	
1.1	1.000				1.000	
1.1	1.000				1.000	
1.1	1.000				1.000	
1.1	1.000				1.000	
1.1	1.000				1.000	
1.1	1.000				1.000	
1.1	1.000				1.000	
1.1	1.000				1.000	
1.1	1.000				1.000	
1.1	1.000				1.000	
1.1	1.000				1.000	
1.1	1.000				1.000	
1.1	1.000				1.000	
1.1	1.000				1.000	
1.1	1.000				1.000	
1.1	1.000				1.000	
1.1	1.000				1.000	
1.1	1.000				1.000	

2	1.000	7			1.000	7
2	1.000				1.000	
2	1.000				1.000	
2	1.000				1.000	
2	1.000				1.000	
2	1.000				1.000	
2	1.000				1.000	
2	1.000				1.000	
2	1.000				1.000	
2	1.000				1.000	
2	1.000				1.000	
2	1.000				1.000	
2	1.000				1.000	
2	1.000				1.000	
2	1.000				1.000	
2	1.000				1.000	
1	1.000				1.000	
1	1.000				1.000	
1	1.000				1.000	
1	1.000				1.000	
1	1.000				1.000	
1	1.000				1.000	
1	1.000				1.000	
1	1.000				1.000	
1	1.000				1.000	
1	1.000				1.000	
1	1.000				1.000	
1	1.000				1.000	
1	1.000				1.000	
1	1.000				1.000	
1	1.000				1.000	
1	1.000				1.000	

6. Kesimpulan

Dalam penelitian ini telah digunakan suatu metode baru untuk menyelesaikan sistem persamaan tak-linear yang disebut metode Newton-Wavelet. Penelitian ini akhirnya menyimpulkan hasil yang lebih memuaskan dari metode Broyden. Jika dibandingkan dengan metode Newton, maka metode ini memberikan hasil yang lebih memuaskan dalam cacah iterasinya.

7. Daftar Pustaka

[1] J. Penny and G. Lindfield, *Numerical Methods Using MATLAB*, Department of Mechanical Engineering, Aston University, Ellis Horwood Limited, 1995.

[2] F. Soesianto and R. M. Abdullah, "Two Competing Methods to Solve Sparse Linear Equations," a paper presented to the International Seminar on Numerical Analysis in Engineering, University of North Sumatra Medan, March 2-3, 2000.

[3] R. M. Abdullah and I. I. Kais, "A Comparison of Three Common Methods to Solve Sparse Linear Equation," in Proc. *Department of Electrical Engineering*, Gadjah Mada University, Yogyakarta, 2000.

[4] R. M. Abdullah and I. I. Kais, "Usage of Wavelet and Other Methods to solve $Ax = b$," in Proc. *Department of Electrical Engineering*, Gadjah Mada University, Yogyakarta, 2000.

[5] I. I. Kais and R. M. Abdullah, "Solving $Ax = b$ Using Wavelets," in Proc. *Department of Electrical Engineering*, Gadjah Mada University, Yogyakarta, 2000.

[6] C. F. Gerald and P. O. Wheatley, *Applied Numerical Analysis*, Fifth Edition, United States of America, 1994.

[7] W. Sweldens, *Construction and application of Wavelet In Numerical Analysis*, PhD Thesis, Columbia,1994.

[8] M. Misiti, Y. Misiti, G. Oppenheim and J. M. Poggi, *Wavelet Toolbox For Use With MATLAB*, User's Guide, Version 1, MathWorks, Inc., 1997.

[9] D. M. Bond and S. A. Vavasis, "Fast Wavelet Transforms for Matrices Arising from Boundary Element Methods," Center for Applied Mathematics, Engineering and Theory Center, Ithaca, NY:Cornell University, March 24, 1994.